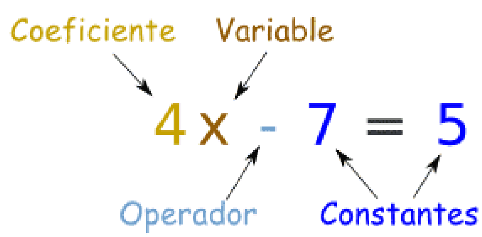
UNIDAD DE APRENDIZAJE I

Saberes procedimentales

1. Define en forma correcta el concepto de desigualdad y el de valor absoluto.
2. Explica la diferencia entre constante, parámetro y variable.
3. Define el concepto de función.
4. Establece la clasificación de funciones.
5. Define el concepto de límite.

A Constantes, parámetros y variables

Constante es un valor fijo. En Álgebra, una constante es un número por sí solo, o algunas veces una letra como a, b o c que representan un número fijo.



Ejemplo En "x + 5 = 9", 5 y 9 son constantes

Si no es una constante es llamada variable

Variable Un símbolo para un número que aún no sabemos. Es normalmente una letra como x o y.

Ejemplo x + 2 = 6, x es la variable

Si no es una variable se la llama constante

Parámetro Es un valor que ya está "incluido" en una función.

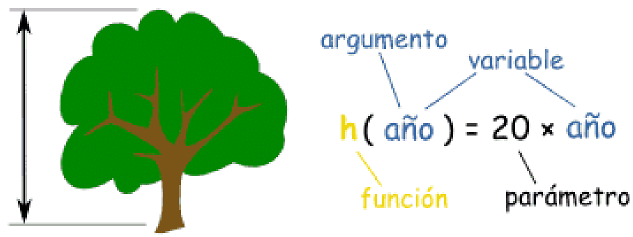
Ejemplo Si una función que calcula la altura de un árbol es **h (años) = 20 × años**, entonces "años" es una variable y "20" es un parámetro.

Los Parámetros pueden ser cambiados para que la función pueda ser usada para otras cosas.

Ejemplo Un árbol diferente puede tener una tasa de crecimiento de 30 cm por año, y su función sería **h(años) = 30 × años.** Podríamos hacerla aún más general escribiendo

h(edad; tasa) = tasa × edad

y en este caso un punto y coma (;) es usado para separar la(s) variable(s) de los parámetros(s)



La altura del árbol es 20 centímetros por cada año

B Concepto de desigualdad

Una desigualdad es una expresión matemática que contiene un signo de desigualdad. Los signos de desigualdad son:

$\neq$ *no es igual*
$<$ *menor que*
$>$ *mayor que*
$\leq$ *menor o igual que*
$\geq$ *mayor o igual que*

De la definición de desigualdad, lo mismo que de la escala de los números algebraicos, se deducen algunas consecuencias, a saber:

1º Todo número positivo es mayor que cero:

$5 > 0$; *porque* $5 - 0 = 5$

2º Todo número negativo es menor que cero:

$-9 < 0$; *porque* $-9 - 0 = -9$

3º Si dos números son negativos, es mayor el que tiene menor **valor absoluto**;

$-10 > -30$; *porque* $-10 - (-30) = -10 + 30 = 20$

4º Una desigualdad que contiene al menos una variable se llama **<u>inecuación</u>**:

$X + 3 < 7$

(La punta del signo < siempre señala el menor)

Ejemplo $3 < 4, \quad 4 > 3$

¿Cómo resolvemos una inecuación? Para esto tenemos que conocer y entender las propiedades de las desigualdades.

Propiedades de las desigualdades

1. Una desigualdad no varía si se suma o resta la misma cantidad a ambos lados:

$a < b$ / $\pm c$ *(sumamos o restamos c a ambos lados)*

$a \pm c < b \pm c$

Ejemplo

$2 + x > 16$ / -2 *(restamos 2 a ambos lados)*

$2 + x - 2 > 16 - 2$

$x > 14$

2. Una desigualdad no varía su sentido si se multiplica o divide por un número positivo:

$a < b$ / $\bullet\, c$ $(c > 0)$ *(c es positivo, mayor que cero)*

$a \bullet c < b \bullet c$

$a > b$ / $\bullet\, c$ $(c > 0)$ *(c es positivo, mayor que cero)*

$a \bullet c > b \bullet c$

Ejemplo

$3 \leq 5 \bullet x$ / $:5$

$3/5 \leq x$ *esto es, todos los reales mayores o iguales que 3/5*

3. Una desigualdad varía su sentido si se multiplica o divide por un número negativo:

$a < b$ / $\bullet\, c$ $(c < 0)$ *(c es negativo, menor que cero)*

$a \bullet c > b \bullet c$

$a > b$ / $\bullet\, c$ $(c < 0)$ *(c es negativo, menor que cero)*

$a \bullet c < b \bullet c$

Ejemplo

$15 - 3 \bullet x \geq 39$ / -15

$-3 \bullet x \geq 39 - 15$ /: -3

$x \leq 24 : (-3)$

$x \leq -8$. Esto es, todos los reales menores o iguales que -8.

De manera recíproca, cuando la parte de la incógnita resulta negativa deben invertirse los signos a ambos lados y cambiar el sentido de la desigualdad, ya que no puede haber desigualdades con incógnita negativa.

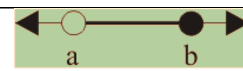
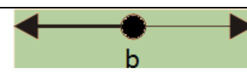
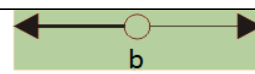
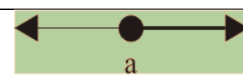
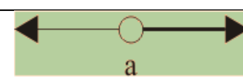
C	Diferentes tipos de intervalos y su notación

Para poder montarse en una máquina del parque de diversiones hay que medir 3 pies o más de altura. Si dejamos que x sea la altura de un cliente, el conjunto de todos los valores de x que permiten que el cliente monte en la máquina se puede representar con $3 \le x$, que es un ejemplo de un intervalo.

Un intervalo es un conjunto conectado de los números reales. Esta lección se dedica a representaciones, contenido y uso de intervalos.

Intervalos Acotados y No Acotados

La siguiente tabla contiene intervalos acotados y no acotados y las diferentes maneras para representarlos:

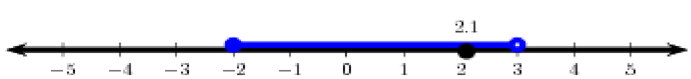
Notación de conjuntos	Notación de intervalos	Gráfica
$\{x \mid a < x < b\}$	$(a\,, b)$	
$\{x \mid a \le x \le b\}$	$[a\,, b]$	
$\{x \mid a \le x < b\}$	$[a\,, b)$	
$\{x \mid a < x \le b\}$	$(a\,, b]$	
$\{x \mid x \le b\}$	$(-\infty\,, b]$	
$\{x \mid x < b\}$	$(-\infty\,, b)$	
$\{x \mid x \ge a\}$	$[a\,, \infty)$	
$\{x \mid x > a\}$	$(a\,, \infty)$	
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	

Para determinar si un número particular pertenece a un intervalo, podemos seguir los pasos siguientes:

1. Sombrear la región del intervalo en la recta real.
2. Dibujar una flecha indicando la localización del número particular.
3. Si la flecha apunta a un punto dentro de la región sombreada, entonces el número pertenece al intervalo. De otra forma, no pertenece.

Ejemplos

1. ¿ El numero 2.1 pertenece al intervalo [-2,3)?
   Solución: Abajo, dibujamos el intervalo y el punto.



Sí, 2.1 pertenece al intervalo.

2. ¿El número - 4 3 pertenece a (-1,∞)?
Solución: Abajo, dibujamos el intervalo y el punto.

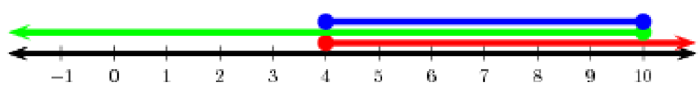
No, - 4/3 no pertenece al intervalo.

Frecuentemente, un intervalo sale inmediatamente de una situación sin mucho análisis. En el ejemplo en la introducción de esta lección, sobre la máquina en el parque de diversiones, el intervalo $3 \leq x$ salió inmediatamente del ejemplo. Otras veces, una situación requiere un poco de análisis antes de encontrar el intervalo apropiado para una situación.

Ejemplos

1. Una pared mide 12 pies de ancho. Para colgar un cuadro se necesita un ancho mínimo de 4 pies tenemos que dejar por lo menos 1 pie a cada lado del cuadro. Si dejamos que *x* sea el ancho del cuadro, ¿cuál es el intervalo asociado con *x*?.

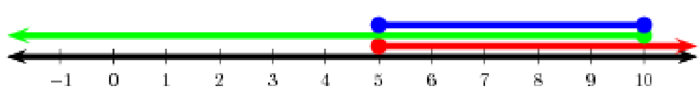
Solución:
Un cuadro debe tener un ancho mínimo de 4 pies, esto significa que x ≥ 4. Tenemos que dejar por lo menos 1 pie en cada lado del cuadro y la pared tiene 12 pies de ancho, esto significa que x + 2 ≤ 12, por lo tanto x ≤ 10.



4 ≤ x ≤ 10

2. Ana necesita ganar por lo menos $40 dólares, gana $8.00 por hora y puede trabajar un máximo de 10 horas por semana. Si dejamos que *x* sea la cantidad de horas que Ana trabaja, ¿cuál es el intervalo asociado con *x*?

Solución:
Necesita ganar por lo menos $40 dólares, gana $8.00 por hora, esto significa que8 x ≥ 40, por lo tanto x ≥ 5. Puede trabajar un máximo de 10 horas por semana, esto significa que x ⩽ 10 .



5 ≤ x ≤ 10

EJERCICIOS

1. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado:
   a) $5 - x \leq 12$
   b) $\frac{x-3}{2} - \frac{2-x}{3} > 3$
   c) $\frac{5}{6}(3-x) - \frac{1}{2}(x-4) \geq \frac{1}{3}(2x-3) - x$
   d) $7(3-x) \geq 5$
   e) $\frac{\left(3-\frac{1}{3}x\right)}{3+\frac{1}{2}} \geq \frac{\left(3x-\frac{5}{2}\right)}{1-\frac{2}{3}}$
   f) $\frac{3x+1}{4} - \frac{1}{3} \leq \frac{2}{15}\,(3x+2) + \frac{4(1-x)}{3}$

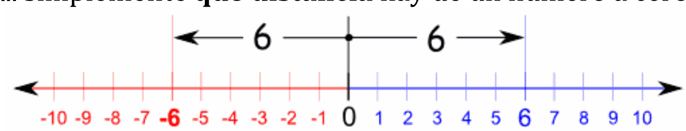
2. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado
   a) $x^2 + 5x \leq 0$
   b) $3(x-5)^2 - 12 \geq 0$
   c) $\frac{x^2-9}{5} - \frac{x^2-4}{15} \leq \frac{1-2x}{3}$
   d) $x^2 - 9x + 14 < 0$
   e) $(x+1)^2 - (x-1)^2 + 12 \geq 0$
   f) $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{x^2-9}{4} \leq \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{1}{5}$
3. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas
   a) $x^4 + 4 < 0$
   b) $x^4 - 3x^2 - 4 \leq 0$
   c) $x^3 - x^2 - 25x + 25 > 0$
   d) $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 < 0$
   e) $x^4 + 3x^3 - 7x^2 + x + 2 \leq 0$
   f) $x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12 \geq 0$

4. Resuelve las siguientes inecuaciones
   a) $\frac{1}{x+2} \leq 0$
   b) $\frac{x^2-9}{x-1} \leq 0$
   c) $\frac{x}{x+3} + 1 < 0$
   d) $\frac{x^2-1}{x^2} \geq 0$
   e) $\frac{x}{x-3} \geq 0$
   f) $\frac{x^2-3x+2}{4-x^2} \leq 0$

D Valor absoluto

Valor absoluto quiere decir...

... simplemente **qué distancia** hay de un número a cero:



"6" está a 6 de cero,
y "-6" **también** está a 6 de cero.
Así que el valor absoluto de 6 es **6**

Ejemplos

- El valor absoluto de -9 es **9**
- El valor absoluto de 3 es **3**
- El valor absoluto de -156 es **156**

No negativos!

Así que en la práctica el "valor absoluto" significa quitar el signo negativo de delante de un número, y pensar en todos los números como números positivos.

Símbolo de valor absoluto

Para indicar el valor absoluto de algo, se escribe los símbolos "|" a los lados, como en estos ejemplos:

|-5|=5 |7|=7

Restar de las dos maneras

No importa en qué orden hagas una resta, su valor absoluto siempre será el mismo:

|8-3|=|5|=5 |3-8|=|-5|=5

Desigualdades con un solo valor absoluto y la variable sólo en el argumento del valor absoluto

Ejemplos

$| 3x+2 | >5$
$| 5x-4 | \leq 7$

Estas desigualdades o inecuaciones son resueltas de manera muy sencilla al aplicar las siguientes propiedades del valor absoluto. Ellas las recordamos de la interpretación geométrica del valor absoluto:

Para c>0 tenemos

5. $|x| < c$ es equivalente a $-c < x < c$
6. $|x| > c$ es equivalente a $x < -c$ o $x > c$

Se tiene una proposición similar para desigualdades con valor absoluto no estrictas, ≤ y ≥.

Así que para resolver una desigualdad con valor absoluto del lado izquierdo y una constante positiva en el otro miembro, solo hay que identificar con alguna de las dos formas, aplicar la equivalencia, resolver las desigualdades de la equivalencia para pasar a determinar el conjunto solución de la desigualdad en base a la condición de la equivalencia. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos

1. Resolver la desigualdad $| 5x-4 | \leq 7$.

Solución:

$$-7 \leq 5x - 4 \leq 7$$

$$-7 + 4 \leq 5x - 4 + 4 \leq 7 + 4$$

$$-3 \leq 5x \leq 11$$

$$-\frac{3}{5} \leq \frac{5x}{5} \leq \frac{11}{5}$$

$$-\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{11}{5}$$

$$x \in \left[-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right]$$

2. Resolver la desigualdad $| 2x+1 | >3$. Hacer la gráfica del conjunto solución.

Solución

$$2x + 1 > 3$$

$$2x + 1 - 1 > 3 - 1$$

$$2x > 2$$

$$\frac{2x}{2} > \frac{2}{2}$$

$$x > 1$$

$$x \in [1, \infty]$$

$$2x + 1 < -3$$

$$2x + 1 - 1 < -3 - 1$$

$$2x < -4$$

$$\frac{2x}{2} < \frac{-4}{2}$$

$$x < -2$$

$$x \in [-\infty, -2]$$

Observación

Así como se resolvió una desigualdad con el valor absoluto de un lado y un número negativo en el otro lado, desigualdades como $|x-3|>0$, con el 0 en un lado de la desigualdad, pueden ser resueltas usando el hecho que un valor absoluto es siempre mayor o igual a cero y es cero si y sólo si el argumento del valor absoluto es cero.

Así, en el caso de la desigualdad $|x-3|>0$ se quiere determinar todos los x para los cuáles el valor absoluto es positivo: al conjunto de todos los números reales hay que quitarle los puntos que hacen el argumento del valor absoluto igual a 0. Hay que quitarle un sólo valor: 3. En definitiva, el conjunto solución de la desigualdad planteada es $R-\{3\}$.

EJERCICIOS Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones. Exprese, en caso de ser posible, el conjunto solución usando la notación de intervalos y construya la gráfica

1. $|x+3|>4$
2. $\frac{1}{5}-2|x+1|\leq 0$
3. $|3-x|>-2$
4. $-\frac{1}{4}|3-2x|+3\geq 1$
5. $|2x+1|<3$
6. $\left|\frac{2-x}{4}\right|-1\geq 0$
7. $|x-4|+3\leq 0$
8. $\left|\frac{x}{4}-5\right|\leq 0$

E Concepto de función

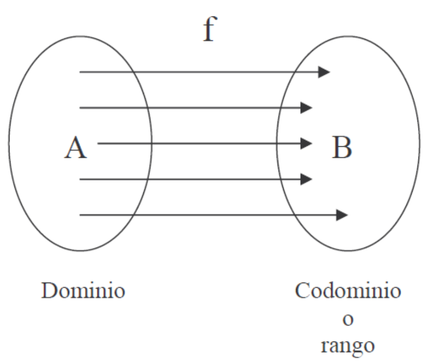
Uno de los conceptos más útiles e importantes en el cálculo es el de función. Intuitivamente consideramos que una cantidad *y* es una función de otra cantidad *x*, si existe una correspondencia entre las dos, y además hay una regla por medio de la cual se asigne un valor a *y* para cada valor correspondiente *x.*

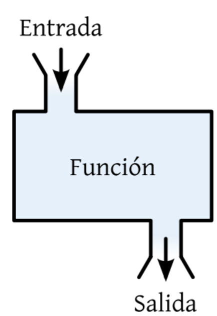
Tratando de aclarar un poco más el concepto anterior, podemos afirmar que una función es una relación que se establece entre los valores de dos variables, de tal manera que el valor de una de ellas (variable dependiente) depende del valor que tome la otra (variable independiente).

O bien, en notación de conjuntos:

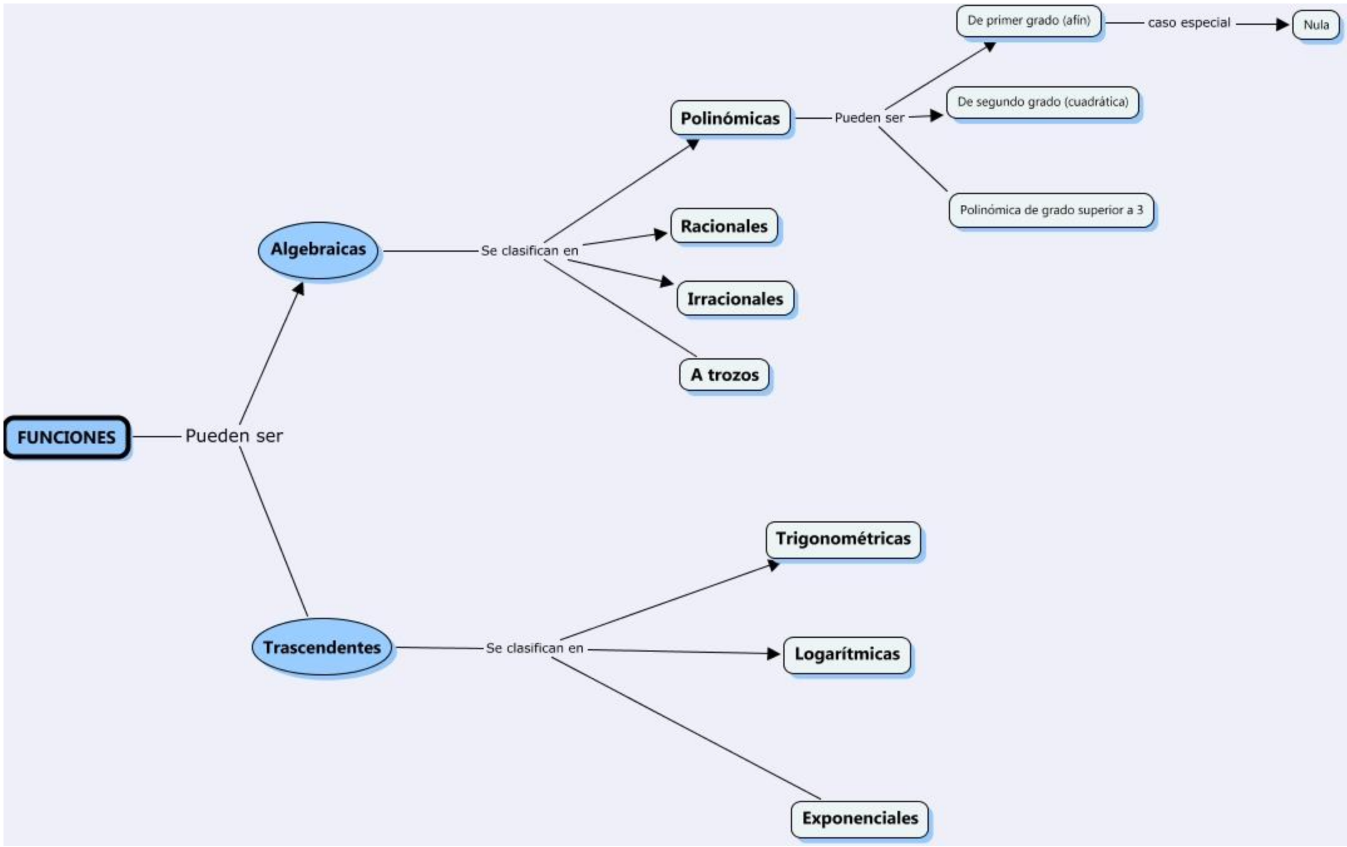
Si cada elemento de un conjunto A, se le hace corresponder de alguna manera un elemento único del conjunto B, se dice que esa correspondencia es una función.

Al conjunto A se le llama **dominio** de la función, y al conjunto B se le llama **codominio (rango, imagen, recorrido, etc.)** de la función.





F Clasificación de las funciones



Operación con funciones.

Suma de funciones

Sean f y g dos funciones reales de variable real definidas en un mismo intervalo. Se llama suma de ambas funciones, y se representa por $f + g$, a la función definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Resta de funciones

Del mismo modo que se ha definido la suma de funciones, se define la resta de dos funciones reales de variable real f y g, como la función

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Para que esto sea posible es necesario que f y g estén definidas en un mismo intervalo.

Producto de funciones

Sean f y g dos funciones reales de variable real, y definidas en un mismo intervalo. Se llama función producto de f y g a la función definida por:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

Cociente de funciones

Dadas dos funciones reales de variable real, f y g, y definidas en un mismo intervalo, se llama función cociente de f y g a la función definida por:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(La función f/g está definida en todos los puntos en los que la función g no se anula.)

Producto de un número por una función

Dado un número real a y una función f, el producto del número por la función es la función definida por:

$$(a * f)(x) = a * f(x)$$

Ejemplo

1- Sean las funciones $f(x) = 3x + 1$, y $g(x) = 2x - 4$. Definir la función $f + g$ y calcular las imágenes de los valores 2, -3 y 1/5.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 1 + 2x - 4 = 5x - 3.$$

Al evaluar los valores pedidos se tiene:

$$(f + g)(2) = 5 \cdot 2 - 3 = 7$$

$$(f + g)(-3) = 5(-3) - 3 = -18$$

$$(f + g)(1/5) = 5 \cdot 1/5 - 3 = -2$$

Obsérvese que si se calculan las imágenes de f y g por separado y se suman, el resultado es el mismo.

2- Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 3$, y $g(x) = x + 3$, definir la función $(f - g)(x)$. Calcular las imágenes de 1/3, -2 y 0 mediante la función $f - g$.

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 3 - (x + 3) = x^2 - 3 - x - 3 = x^2 - x - 6$$

Al evaluar los valores pedidos se tiene:

$$(f - g)(1/3) = (1/3)^2 - \frac{1}{3} - 6 = -\frac{56}{9}$$

$$(f - g)(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 0$$

$$(f - g)(0) = (0)^2 - 0 - 6 = -6$$

Calculando las imágenes de los números mediante las funciones f y g por separado, y efectuando la resta, se obtiene el mismo resultado.

3- Dadas las funciones $f(x) = \frac{x}{3} - 3$ y $g(x) = 2x + 1$, definir la función $f * g$

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) = \left(\frac{x}{2} - 3\right)(2x + 1) = x^2 + \frac{11}{2}x - 3$$

4- Dadas las funciones $f(x) = -x - 1$ y $g(x) = 2x + 3$, definir la función f/g y evaluar la función en -1 y 2.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-x-1}{2x+3}$$

Al evaluar la función se tiene:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-1) = \frac{-(-1)-1}{2(-1)+3} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{-(2)-1}{2(2)+3} = \frac{-3}{7}$$

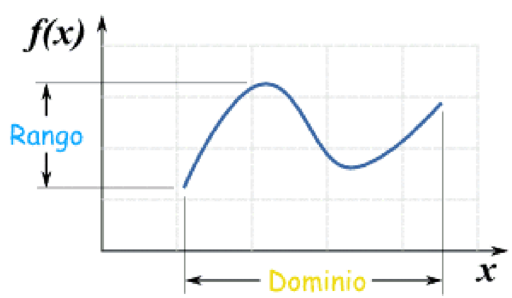
La función f/g está definida para todos los números reales, salvo para $x = -3/2$, donde la función g se anula.

$$\left(\frac{f}{g}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-(-3/2)-1}{2(-3/2)+3} = \frac{1/2}{0}\ no\ esta\ definida$$

Calculando por separado las imágenes de los números mediante las funciones f y g, y después efectuando su cociente, se obtienen los mismos resultados.

F Dominio y codominio de una función

En su forma más simple el dominio son todos los valores a los que aplicar una función, y el rango son los valores que resultan.



Lo que puede **entrar** en una función se llama el **dominio**

Lo que **es posible que salga** de una función se llama el **codominio**

Lo que **en realidad sale** de una función se llama **rango** o **imagen**

Entonces, en el diagrama de arriba el conjunto "X" es el dominio, el conjunto "Y" es el codominio, y los elementos de Y a los que llegan flechas (los valores producidos realmente por la función) son el rango.

El dominio de la función se denota como $Dom\ (f)$ y el codominio o rango de la función se denota como $Cod(f) = Rang(f)$.

Ejemplo

1. La función $f(x) = x^2$ puede tener dominio (los valores de x o lo que entra) los números $\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ y el rango será entonces el conjunto $\{0, 1, 4, 9, \ldots.\}$

$$Dom\ (f) = (-\infty\ , \infty)$$

$$Rang(f) = [0, \infty)$$

2. Encuentre el dominio de la función $f(x) = \sqrt{5x-2}$

   Para que la función $f(x)$ exista es necesario que $5x - 2 \geq 0$, entonces al reolver la desigualdad se tiene que $x \geq 2/5$, es decir $Dom\ (f) = \left[\frac{2}{5}, \infty\right)$

3. Encuentre el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

   Para que la función $f(x)$ exista es necesario que $x^2 - 9 \geq 0$, entonces al reolver la desigualdad se tiene que:

$$(x+3)(x-3) \geq 0$$

   Cuando los factores son positivos:

$$x + 3 \geq 0 \qquad\qquad x - 3 \geq 0$$

$$x \geq -3 \qquad\qquad x \geq 3$$

Cuando los factores son negativos:

$$x + 3 \leq 0 \qquad\qquad x - 3 \leq 0$$

$$x \leq -3 \qquad\qquad x \leq 3$$

Al analizar las respuestas, el dominio es $Dom\ (f) = (-\infty, -3]U[3\ , \infty)$

EJERCICIOS Calcular el dominio de las siguientes funciones

1. $f(x) = \frac{3x}{x+4}$
2. $g(x) = \frac{x^2}{x^2+16}$
3. $y = 2x^2 - 4x + 1$
4. $h(x) = \sqrt{x - 4}$
5. $y = sen\ x$
6. $m(x) = \cos x$
7. $g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x - 1}$
8. $h(x) = \sqrt{1 - 4x}$
9. $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$
10. $g(x) = \frac{2x}{(x-2)(x+1)}$

G Concepto de límite

En matemática, el **límite** es un concepto que describe la tendencia de una sucesión o una función, a medida que los parámetros de esa sucesión o función se acercan a determinado valor. El **límite de una función** es un concepto fundamental del cálculo diferencial matemático.
Informalmente, el hecho que una función f tiene un límite L en el punto p, significa que el valor de f puede ser tan cercano a L como se desee, tomando puntos suficientemente cercanos a p, pero distintos de p.

En análisis real para funciones de una variable, se puede hacer una definición de límite similar a la de límite de una sucesión, en la cual, los valores que toma la función dentro de un intervalo se van aproximando a un punto fijado c, independientemente de que éste pertenezca al dominio de la función. Esto se puede generalizar aún más a funciones de varias variables o funciones en distintos espacios métricos.

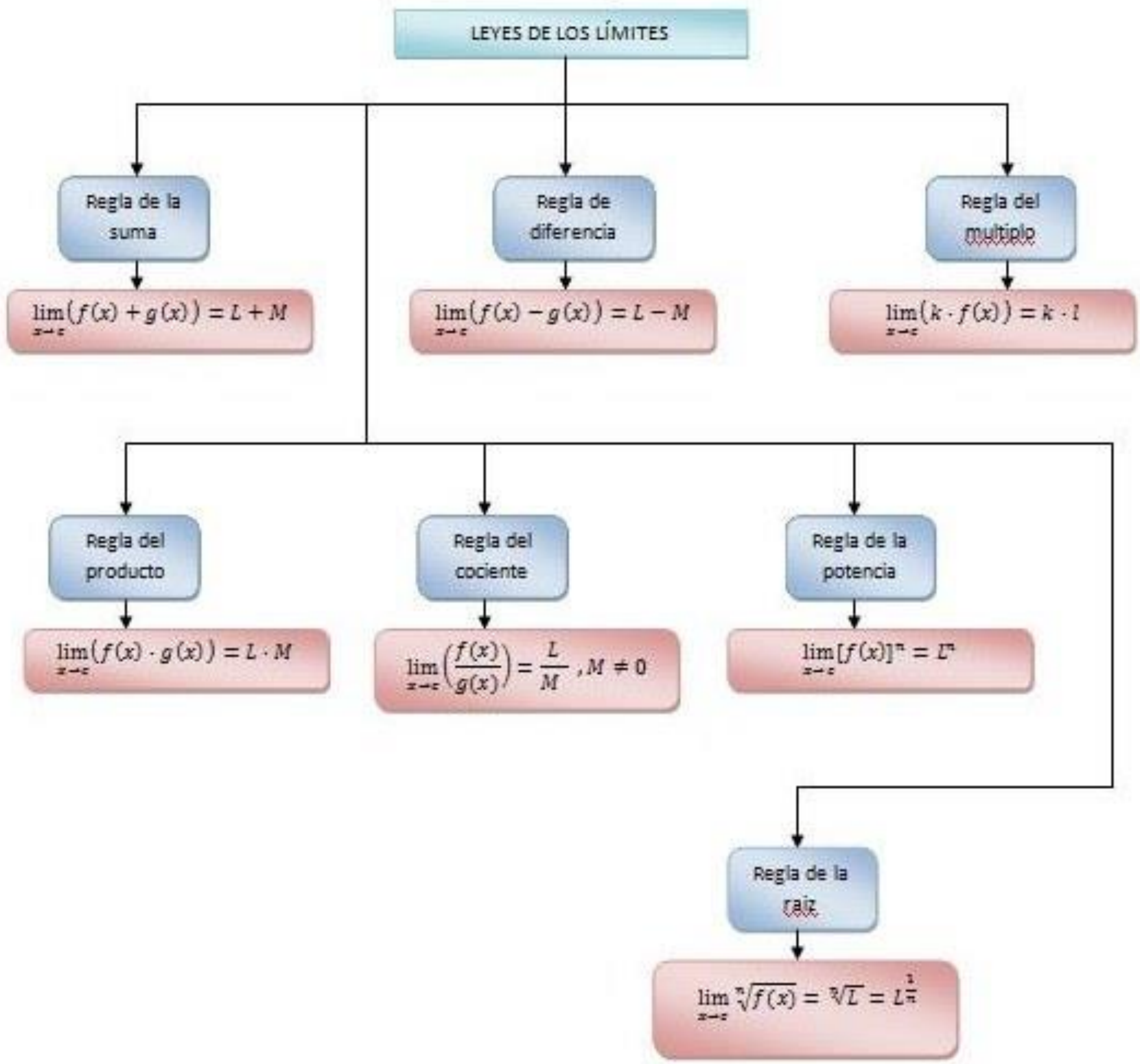
"El límite de *f(x)* cuando x tiende a c es igual a L si y sólo si para todo número real ε mayor que cero existe un número real δ mayor que cero tal que si la distancia entre x y c es menor que δ, entonces la distancia entre la imagen de x y L es menor que ε unidades".

Esta definición, se puede escribir utilizando términos lógico-matemáticos y de manera compacta:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : 0 < |x - c| < \delta \quad \rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Si f(x) y g(x) son funciones de variable real y k es un escalar, entonces, se cumplen las siguientes propiedades o reglas:

H Teoremas sobre límites



EJERCICIOS

1. $\lim_{x\to 5} 3x-7$
2. $\lim_{x\to 2} x^2+2x-1$
3. $\lim_{x\to 3} \frac{4x-5}{5x-1}$
4. $\lim_{x\to 4} \frac{3x^2-8x-16}{2x^2-9x+4}$
5. $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$
6. $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^4-16}$
7. $\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{8x+1}{x+3}}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

Límite cuando la variable tiende a infinito

El caso que se presenta cuando la variable tiende a tomar un valor muy grande, es decir cuando la variable tiene a infinito. El procedimiento para el cálculo del límite es igual, solamente debemos considerar las operaciones algebraicas que se pueden realizar con el símbolo ∞.

a) $\infty + \infty = \infty$
b) Si a>0, $a^*\infty = \infty$
c) Si a<0, $a^*\infty = -\infty$
d) $(+\infty)(+\infty) = \infty$
e) $(+\infty)(-\infty) = -\infty$
f) $\infty - \infty = indeterminanción$
g) $0 * \infty = indeterminación$
h) $\frac{\infty}{\infty} = indterminación$
i) $\infty \pm a = \infty$

Ejemplo

1. Hallar $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+5x^2-3}{2x^3+x+7}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+5x^2-3}{2x^3+x+7} = \frac{\infty}{\infty} = indeterminado$$

En este caso para evitar a indeterminación debemos dividir toda la fracción entre la variable elevada a la mayor potencia:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+5x^2-3}{2x^3+x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}} = \frac{1+0-0}{2+0+0} = \frac{1}{2}$$

2. Evaluar $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2+x-9}{x^4+5x^2+3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2+x-9}{x^4+5x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{9}{x^4}}{1+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0$$

3. Evaluar $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x^4+4}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x^4+4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{1+3/x^4+\frac{4}{x^8}}} = \frac{3}{\sqrt{1}} = 3$$

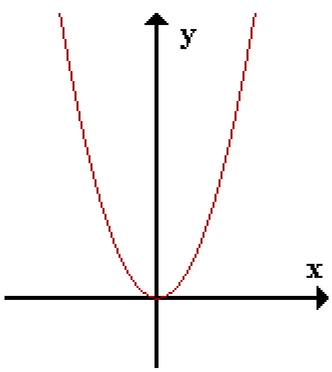
EJERCICIOS

1. $\lim_{x\to-3}(2x^4-5x^3-x^2-9x+3)$
2. $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x^3-5x+2}{x^2+3x+1}$
3. $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{x^2+8}}{2x+3}$
4. $\lim_{x\to-3} \frac{x^2+6x+9}{x^2+3x}$
5. $\lim_{x\to5} \frac{x^2-3x-10}{x^2-6x+5}$
6. $\lim_{x\to-1} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-2x-3}$

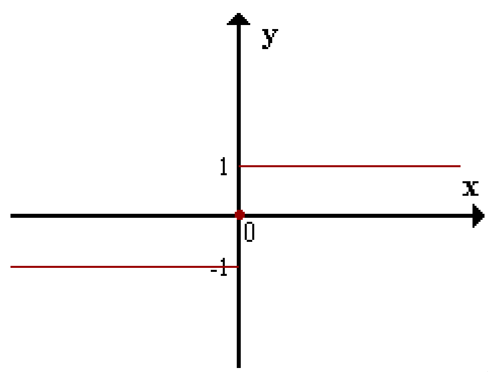
7. $\lim_{x\to -2} \frac{4x^2+7x-2}{x^2-4}$
8. $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$
9. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$
10. $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{6}}{x+2}$
11. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x}$
12. $\lim_{x\to 4} \frac{\frac{x}{x-3}-4}{x-4}$
13. $\lim_{x\to \infty} \frac{4x^2+x+6}{3x^2+1}$
14. $\lim_{x\to \infty} \frac{6x^3-5x^2+3}{2x^3+4x-7}$
15. $\lim_{x\to \infty} \frac{9x^3+x^2-12x+4}{3x^2-15x+7}$
16. $\lim_{x\to \infty} \frac{-7x^2+8x-5}{x^3+1}$
17. $\lim_{x\to \infty} \frac{6x^2-x^3+5x}{\sqrt{4x^4-27}}$
18. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+2}{4+3x\sqrt{x}}$

I Continuidad

Intuitivamente, la continuidad significa que un pequeño cambio en la variable x implica sólo un pequeño cambio en el valor de f(x), es decir, la gráfica consiste de un sólo trozo de curva.



$f(x) = x^2$



$f(x) = sng\ x$

En contraste, una gráfica como la de la función f(x) = sgn x (signo de x) que consiste de pedazos de curva separados por un vacío en una abscisa exhibe allí una discontinuidad.

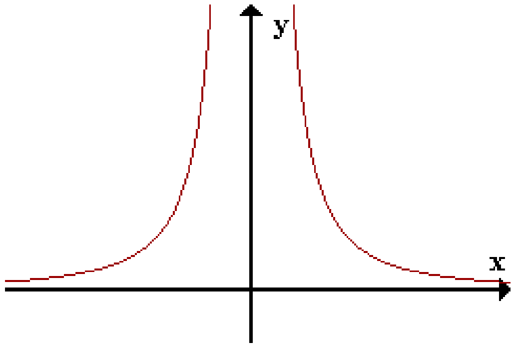
La continuidad de la función f(x) para un valor a significa que f(x) difiere arbitrariamente poco del valor f(a) cuando x está suficientemente cerca de a.

Expresemos esto en términos del concepto de límite...

Una función f(x) es continua en un punto a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

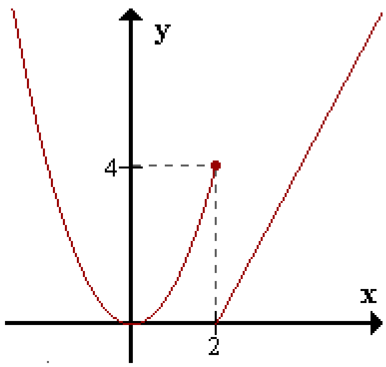
Nota: observar que debe existir f(a) y debe existir el $\lim_{x\to a} f(x)$ y debe ser igual a f(a).

Ejemplos



$f(x)= 1/x^2$

Discontinua en x=0 (No existe f(0))



$f(x) = x^2$ si $x <= 2$
$2x - 4$ si $x > 2$

Discontinua en x=2.

Si bien existe f(2), no existe $\lim_{x\to 2} f(x)$, pues $\lim_{x\to 2^-} f(x)=4$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$

Sin embargo, si miramos la función para x próximos a 2 pero menores, e ignoramos los x mayores que 2, la función es continua en 2 "por la izquierda".

Continuidad por la izquierda

Una función f(x) es continua por la izquierda en el punto a si existe f(a) y $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Continuidad por la derecha

Una función f(x) es continua por la derecha en el punto a si existe f(a) y $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

La función anterior es continua por la izquierda en x=2, pero no por la derecha.

Continuidad en un intervalo cerrado [a,b]

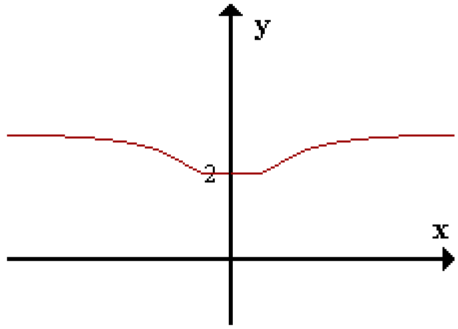
Una función f(x) es continua en un intervalo cerrado [a,b] si:
- f es continua en a por la derecha
- f es continua en b por la izquierda
- f es continua en x, para todo x perteneciente al intervalo abierto (a,b)

Clasificación de discontinuidades

Evitable

Caso A: No existe f(a) pero existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

Ejemplo



$f(x)= e^{-1/x2} + 2$

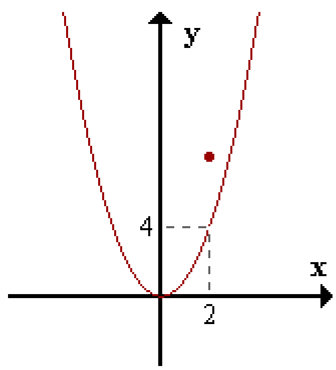
No existe f(0) pues anula un denominador.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$ o sea $\lim_{x\to 0} f(x)=2$

Podemos extender la definición de la función, asignándole en el punto al valor del límite, con lo cual la función se torna continua. Por ello este tipo de discontinuidad se denomina evitable.

Caso B: Existe f(a) y existe $\lim_{x\to a} f(x)=b$ pero $b\neq f(a)$. (Existe f(a) pero es distinto al valor del límite).

Ejemplo



$f(x) = x^2$ si $x\neq 2$
8 si x=2

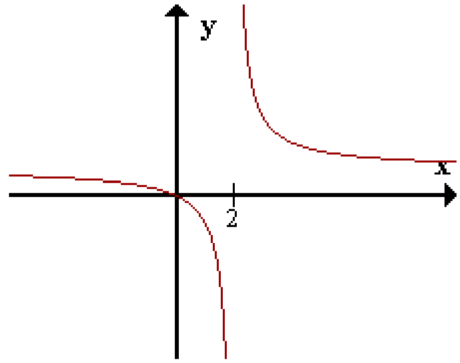
f(2) = 8
$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

Asignándole a la función el valor 4 en x=2, se elimina la discontinuidad.

No evitable

Caso 1: $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$.
(Los límites laterales son distintos).

Ejemplo



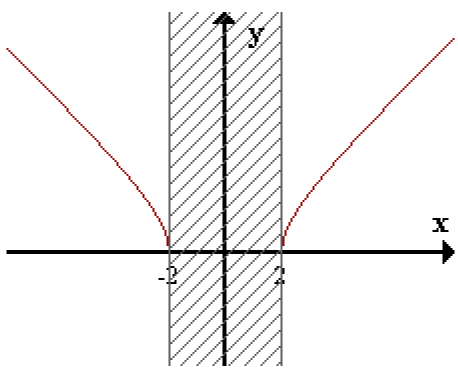
f(x) = x/(x - 2)

$\lim_{x->2-}$f(x) = -inf
$\lim_{x->2+}$f(x) = +inf

Caso 2:

No existe $\lim_{x->a-}$f(x) o no existe $\lim_{x->a+}$f(x).
(No existe por lo menos uno de los límites laterales).

Ejemplo



f(x) = $\sqrt{x^2 - 4}$

En x=-2 y x=2 la función presenta discontinuidades no evitables de 2ª especie. No existe $\lim_{x->-2+}$f(x) y no existe $\lim_{x->2-}$f(x).

EJERCICIOS Analizar la continuidad de las siguientes funciones

1. $f(x) = \frac{5x}{1+x}$
2. $g(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$
3. $h(x) = \sqrt{x+3}$
4. $y = 2x^3 - x^2 + 11$
5. $m(x) = \frac{3}{x^2-3x+2}$